1	2	3	4	Total	Nota

Análisis Matemático II
Primer Parcial (03/10/2018)
Comisión 1

Apellido y nombre:
Carrera:

Justificar claramente TODAS las respuestas. Si se usa un teorema en la justificación, se debe enunciar.

1. (20 puntos)Sea $f(x) = [x]$ la función parte entera de x en el intervalo $[0, 3]$. Graficar con cuidado!
   (a) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una partición P_n del intervalo $[0, 3]$ tal que $S(f, P_n) - s(f, P_n) \leq 3\frac{1}{n}$. Concluir que f es integrable.
   (b) Enunciar el criterio de integrabilidad (de las "sucesiones" de particiones).
   (c) Usando este criterio, mostrar que el valor de la integral $\int_0^3 [x]\, dx = 3$.

2. (20 puntos) Jaimito perdió la hoja de la tarea de matemática y tiene que reconstruir el enunciado. Recuerda apenas algunos datos: dada $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, para $x > 0$ y f una función continua positiva, se sabe que

$$g(x)f(g(x)) = \frac{d}{dx}(F(g(x))), \quad \text{con} \quad g(0) = 1.$$

   Se puede encontrar la expresión para la función $g(x)$? Cuál es?

3. (20 puntos) Enrique VIII, fascinado con las funciones trigonométricas, le quiere regalar a Ana Bolena un pendiente con la forma de la región comprendida entre el eje x y la función $\text{sen}(x)$ entre 0 y 2π. El joyero necesita saber el area de la región para saber cuánto oro necesita. Según Enrique VIII el área está dada por

$$\int_0^{2\pi} |sen(x)|\, dx,$$

   pero el joyero insiste en que esta equivocado.
   (a) Justificar que Enrique VIII tiene razón.
   (b) Calcular el área.

4. (a) (10 puntos) Enunciar y demostrar la fórmula de la integración por partes.
   (b)(30 puntos) Calcular las siguientes primitivas

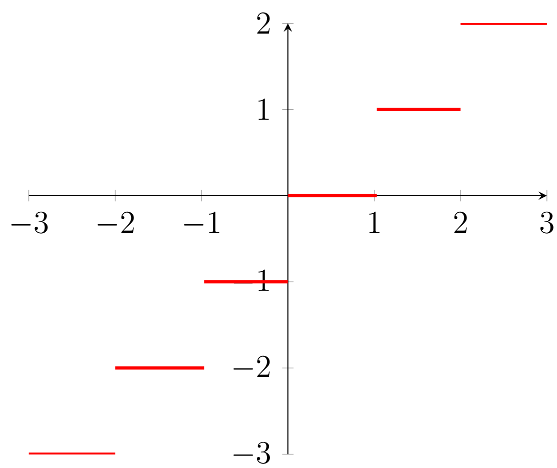
$$(i) \int \tanh x\, dx, \quad (ii) \int e^{ax} \cos(bx)\, dx, \quad (iii) \int \frac{1}{\sqrt{\ln(x) - 1} + \sqrt{\ln(x) + 1}} \frac{1}{x} dx.$$

Solución del primer parcial de Análisis 2 turno mañana

Franco Golfieri

Octubre 2018

Problema 1: Hagamos un gráfico de la función



a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = [x]$. Tomemos la siguiente partición del intervalo $[0,3]$, $t_i = \frac{i}{n}$, $P_n = \{t_i\}_{i=0}^{3n}$ y definamos $M_i := \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ $\forall i \in [1, 3n]$ y $m_i := \text{ínf}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ $\forall i \in [0,3]$. Y notar que $t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$. Ver que $M_n = 1$ pues $f(1) = 1$ y ese es el máximo en el intervalo $[\frac{n-1}{n}, 1]$, $M_{2n} = 2$ pues $f(2) = 2$ y es el máximo del intervalo $[2 - \frac{1}{n}, 2]$y $M_{3n} = 3$ pues $f(3)$ es el máximo del intervalo $[3 - \frac{1}{n}, 3]$

Luego:

$$\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{3n} M_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{3n} M_i \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i + \sum_{i=n+1}^{2n} M_i + \sum_{i=2n+1}^{3n} M_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} 0 + \sum_{i=n-1}^{n} 0\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{2n-1} 1 + \sum_{i=2n-1}^{2n} 2\right) + \left(\sum_{i=2n+1}^{3n-1} 2 + \sum_{i=3n-1}^{3n} 3\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left((0(n-1)+1) + (1(n-1)+2) + (2(n-1)+3)\right) \\
&= \frac{1}{n}(3n+3) \\
&= \frac{3}{n} + 3
\end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned}
s(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{3n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{3n} m_i \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=n+1}^{2n} m_i + \sum_{i=2n+1}^{3n} m_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} 0\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{2n} 1\right) + \left(\sum_{i=2n+1}^{3n} 2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left((0n) + (1n) + (2n)\right) \\
&= \frac{1}{n}(3n) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S(f,P_n) - s(f,P_n) = \left(\frac{3}{n} + 3\right) - 3 = \frac{3}{n}$
Ahora usemos el siguiente criterio de integrabilidad:

Segundo Criterio de integrabilidad: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe P_ε partición de $[a,b]$ tal que $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$

Luego sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{n_0} < \varepsilon$. Finalmente tenemos que:

$S(f,P_{n_0}) - s(f,P_{n_0}) = \frac{3}{n_0} < \varepsilon$ y por el segundo criterio de integrabilidad f es integrable en el $[0,3]$

b) Primer Criterio de integrabilidad: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Supontamos que existe una familia $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de $[a,b]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n) = l$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ y $\int\limits_a^b f = l$

c) Ver que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3 = \lim\limits_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n)$

Por lo tanto por el primer criterio de integrabilidad tenemos que :

$$\int\limits_0^3 [x] = 3$$

Problema 2:

Jaimito recuerda que f es continua y positiva para todo los reales positivos, luego por el Priemer Teorema Fundamental del Cálculo $F = \int_0^x f(t)\,dt$ es derivable para todo $x > 0$ y $F'(x) = f(x)$. Ahora, usando regla de la cadena y la otra hipótesis que recuerda tenemos que:

$$g(x)f(g(x)) = (F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Como $f(g(x)) \neq 0$ para todo x (pues f es positiva) cancelamos en ambos miembros de la igualdad dicha expresión y tenemos que $g(x) = g'(x)$. Usando ejercicio 9 del práctico 3 sabemos que $g(x) = ke^x$ para algún $k \in \mathbb{R}$. Pero además sabíamos por el enunciado que $g(0) = 1$. Luego $1 = g(0) = ke^0 = k$ y así conculuimos que

$$g(x) = e^x.$$

Problema 3:

i) Sabemos que si una función $f \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$ el área comprendida entre f y el eje x en dicho intervalo es $\int_a^b f$. Y si $f \leq 0$ en un intervalo $[a, b]$ el área comprendida entre f y el eje x en dicho intervalo es $-\int_a^b f$. Luego ver que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es mayor igual a 0 en el intervalo $[0, \pi]$ y menor igual a 0 en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. Definamos $A_{f|[a,b]}$ como el área de la función f en el intervalo $[a, b]$. Luego es claro que si $c \in (a, b)$ tenemos que $A_{f|[a,b]} = A_{f|[a,c]} + A_{f|[c,b]}$. Por lo tanto como

$$\begin{aligned} A_{\operatorname{sen}|[0,2\pi]} &= A_{\operatorname{sen}|[0,\pi]} + A_{\operatorname{sen}|[\pi,2\pi]} \\ &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\ dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\ dx \end{aligned}$$

Y por otro lado como viendo a la función $|\operatorname{sen}(x)|$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ tenemos que

$$|\operatorname{sen}(x)| = \begin{cases} sen(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -sen(x) & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

tenemos que :

$$\int\limits_0^{2\pi} |sen(x)|\ \ dx = \int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\ dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\ dx$$

Por lo tanto coinciden y Enrique VIII tenía razón.

b) Como $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una función continua en $[0, 2\pi]$ y $g(x) = -\cos(x)$ es una función derivable tal que $g'(x) = f(x)\, \forall x \in [0, 2\pi]$ podemos usar barrow y tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\mathrm{sen}(x)| \; dx &= \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(x) \; dx - \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sen}(x) \; dx \\
&= (-\cos(\pi) - (-\cos(0)) + (\cos(2\pi) - (\cos(\pi)) \\
&= 2 + 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Problema 4b:

i) Notar que

$$\int \tanh(x)\, dx = \int \frac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)}\, dx$$

Aca ahora hacemos la sustitución $u = \cosh(x)$ y luego $du = \sinh(x)\, dx$. Por lo tanto

$$\int \tanh(x)\, dx = \int \frac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = ln\,(|u|) + C = ln\,(|\cosh(x)|) + C = ln\,(\cosh(x)) + C$$

ii) Supongamos que $a \neq 0$. Comenzamos utilizando el método de integración por partes tomando $g'(x) = e^{ax}\, dx$ y $f(x) = \cos(bx) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{a}\, e^{ax}$ y $f'(x) = -b\ \mathrm{sen}(bx)\, dx$. Por lo tanto:

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} \cos(bx) - \int \left(\frac{1}{a}\, e^{ax}\right) (-b\, \mathrm{sen}(bx)) \; dx = \frac{b}{a} \int e^{ax}\, \mathrm{sen}(bx)\, dx$$

Ahora para resolver $\int e^{ax}\, \mathrm{sen}(bx)\, dx$ utilizamos el método de integración por partes de nuevo tomando $g'(x) = e^{ax}\, dx$ y $f(x) = \mathrm{sen}(bx) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{a}\, e^{ax}$ y $f'(x) = b\ \cos(bx)\, dx$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\, \mathrm{sen}(bx)\, dx &= \left(\frac{1}{a}\, e^{ax}\right) \mathrm{sen}(bx) - \int \left(\frac{1}{a}\, e^{ax}\right) (b \cos(bx)) \; dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax}\, \mathrm{sen}(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx)\, dx
\end{aligned}
$$

Por lo tanto :

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos(bx)dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx
\end{aligned}
$$

Luego:

$$
\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)
$$

Como $a \neq 0$ luego $a^2+b^2 \neq 0$ y por lo tanto $\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)$ está bien definida.

Luego:

$$
\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax}sen(bx)\right) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\ \cos(bx) + b\ \mathrm{sen}(bx)\right)
$$

Ahora si $a=0$ y $b\neq 0$ tenemos que $\int e^{ax}\cos(bx) = \int \cos(bx) = \frac{1}{b}\,\mathrm{sen}(bx)$ que coincide con la expresión hallada anteriormente para $a=0$ y $b\neq 0$.

Ahora si $a=0$ y $b=0$ tenemos que $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \int e^{0x}\cos(0x)\,dx = \int 1\,dx = x + C$.

Finalmente tenemos:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\;\cos(bx) + b\;\mathrm{sen}(bx)) + C & \text{si } a \neq 0 \vee b \neq 0 \\ x + C & \text{si } a = b = 0 \end{cases}$$

iii) Hagamos sustitución tomando $u = ln(x)$ y por lo tanto $du = \frac{1}{x}dx$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{ln(x)-1}+\sqrt{ln(x)+1}}\frac{1}{x}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{u-1}+\sqrt{u+1}}\,du \\
&= \int \frac{\sqrt{u-1}-\sqrt{u+1}}{(u-1)-(u+1)}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int \sqrt{u-1}-\sqrt{u+1}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int (u-1)^{\frac{1}{2}}\,du - \int (u+1)^{\frac{1}{2}}\,du\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(u-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\right) + C \\
&= -\frac{1}{3}\left((u-1)^{\frac{3}{2}} - (u+1)^{\frac{3}{2}}\right) + C \\
&= -\frac{1}{3}\left((ln(x)-1)^{\frac{3}{2}} - (ln(x)+1)^{\frac{3}{2}}\right) + C
\end{aligned}$$